

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2016**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σελίδα 262 (i) σχολικού βιβλίου

**A2.** Σελίδα 141 σχολικού βιβλίου

**A3.** Σελίδα 247 σχολικού βιβλίου

**A4.**

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad A_f = \mathfrak{R}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	$\searrow$	ελάχ	$\nearrow$

$x \in (-\infty, 0]$  η f γνησίως φθίνουσα

$x \in (0, +\infty]$  η f γνησίως αύξουσα

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x=0$  το  $f(0)=0$ .

**B2.**

$$f''(x) = \frac{2(-3x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-	
f	∩	∪	∩	

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}} = \frac{1}{4}$$

B3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0 = \lambda$ , επομένως έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

$$\text{Ακόμα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 = \beta,$$






άρα η ευθεία  $y = 1$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

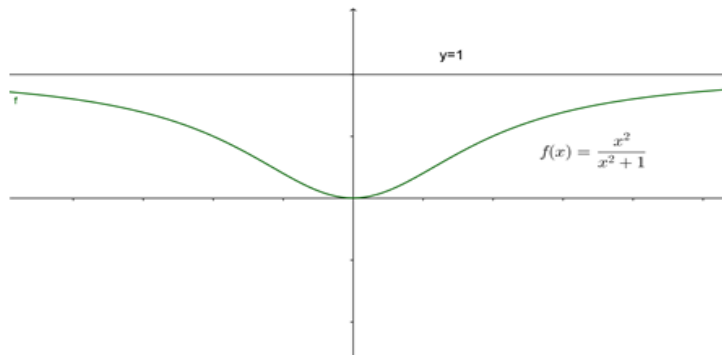
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0 = \lambda, \text{ επομένως έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

Ακόμα,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 = \beta,$

άρα η ευθεία  $y = 1$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$ .

B4.

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$
$f'$	-	-	+	+	+
$f''$	-	+	+	-	-
$f$					



**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = e^x - x - 1$  παραγωγίσιμη με  $g'(x) = e^x - 1$

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	
$g(x)$	↘		↗

$$g(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x=0$  το  $g(0)=0$

Επομένως  $g(x^2) \geq 0$ , η ισότητα ισχύει για  $x=0$ .

$$\Gamma 2. \text{ Έχουμε ότι } f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x^2)|$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = g(x^2)$$

Για  $x=0$  έχουμε ότι  $f(0) = g(0) = 0$ .

Στο  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  έχουμε  $f(x) \neq 0$  και  $f$  συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως προκύπτουν οι παρακάτω συναρτήσεις:

α)  $f(x) = g(x^2), \quad x \in \mathbb{R}$

β)  $f(x) = \begin{cases} g(x^2), & x \geq 0 \\ -g(x^2), & x < 0 \end{cases}$

γ)  $f(x) = \begin{cases} -g(x^2), & x \geq 0 \\ g(x^2), & x < 0 \end{cases}$

δ)  $f(x) = -g(x^2), \quad x \in \mathbb{R}$

Γ 3.  $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} - 2$$

$$f'''(x) = 4xe^{x^2} + 8xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} = xe^{x^2}(8x^2 + 2)$$

Για  $x < 0$  έχουμε  $f'''(x) < 0$  και  $f''$  συνεχής άρα  $f''$  είναι γν. φθίνουσα

Για  $x > 0$  έχουμε ότι  $f'''(x) > 0$  και  $f''$  συνεχής άρα  $f''$  είναι γν. αύξουσα.

Επομένως  $f$  είναι κυρτή.

Γ4. Θέτω  $h(x) = f(x+3) - f(x)$

$$h'(x) = f'(x+3)(x+3)' - f'(x) \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

$x+3 > x$ ,  $f'$  γνησίως αύξουσα άρα

$$f'(x+3) > f'(x)$$

$$h'(x) > 0$$

Άρα η  $h(x)$  γνησίως αύξουσα, οπότε 1-1.

$$h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x$$

Μοναδική ρίζα το  $x=0$

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

Για να δείξουμε ότι  $f(\pi) = \pi$  αρκεί:

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = f(\pi)$$

$$= \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta\mu x dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \left[ f'(x)\eta\mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \\
 &= \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \left[ f'(x)\eta\mu x \right]_0^{\pi} - \left( \left[ f(x)\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx \right) = \\
 &f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 = \\
 &= -f(\pi)(-1) + f(0)1 = \pi
 \end{aligned}$$

Διότι  $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\eta\mu x$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)\eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

**Δ2.**

α)  $e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad (1)$

έστω ότι υπάρχει κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

$$f'(0) = 0$$

Για  $x = x_0$

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow \ln e^{x_0} = \ln 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Δηλαδή  $f'(0) = 0$  άποδο διότι  $f'(0) = 1$

β)  $\left. \begin{array}{l} f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 1, f' \sigma\upsilon\nu \nu \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  άρα γνησίως αύξουσα

**Δ3.**

Γ γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα  $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f) = \mathbb{R}$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Άρα  $f(x) > 0$  κοντά στο  $+\infty$

$$\frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Από κριτήριο παρεμβολής το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Δ4) Θέτω όπου  $\ln x = u$ , με αλλαγή μεταβλητής έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ x = 1 \Leftrightarrow u = 0 \\ x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq \pi \Leftrightarrow f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow \int_0^\pi 0 du < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi \pi du$$

$$\text{Άρα } 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$$

### ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

**ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ      ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ**

**ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ      ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ**

**ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ      ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ**

**ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ**



ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ**

**ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ**

**ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ   ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ**

ΟΡΟΣΗΜΟ